

## О ПРИМЕНЕНИИ НЕПРЕРЫВНОГО ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

### Аннотация.

*Актуальность и цели.* Дифференциальные уравнения математической физики, относящиеся к параболическому типу, играют одну из центральных ролей в математическом моделировании самых различных процессов в физике и технике. В частности, параболические уравнения широко используются при моделировании процессов диффузии, динамики жидкостей и газов, а также биологических и экологических явлений. Эти уравнения встречаются в задачах тепло- и массопереноса, теории горения, теории фильтрации и т.д. Вместе с тем, несмотря на достаточно большое число известных результатов в области приближенного решения параболических уравнений, имеется большая практическая потребность в разработке эффективных численных методов решения нелинейных уравнений параболического типа, которые, будучи достаточно простыми, являлись бы устойчивыми к возмущениям исходных данных, допуская при этом применение к максимально широкому классу уравнений.

*Материалы и методы.* Предметом исследования данной работы является задача Коши для одномерного нелинейного параболического уравнения. Ставится задача построения численного метода решения упомянутой задачи. Для этого выполняется переход от исходной задачи Коши для параболического дифференциального уравнения к нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерра. Для решения этого уравнения привлекается непрерывный операторный метод решения нелинейных уравнений: выполняется переход к вспомогательной системе интегродифференциальных уравнений специального вида, которая далее решается при помощи одного из численных методов решения дифференциальных уравнений. Результатом применения метода является набор приближенных значений неизвестной функции в узлах равномерной сетки, построенной в конечной области.

*Результаты.* Предложен численный метод решения задачи Коши для одномерного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных параболического типа. Значимость этого метода обусловлена его простотой в сочетании с универсальностью, позволяющей применять единый алгоритм для весьма широкого класса нелинейностей.

*Выводы.* Предложен эффективный итерационный метод решения задачи Коши для нелинейного одномерного дифференциального уравнения параболического типа. Значительный теоретический и практический интерес представляет распространения этого метода на краевые задачи, а также на многомерные уравнения.

**Ключевые слова:** параболические уравнения, задача Коши, непрерывный операторный метод, нелинейные интегральные уравнения, логарифмическая норма.

## ON APPLYING THE CONTINUOUS OPERATOR METHOD TO SOLVE THE DIRECT PROBLEM FOR NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS

### **Abstract.**

*Background.* Parabolic differential equations of mathematical physics play very important role in mathematical modeling of the wide range of phenomena in physical and technical sciences. In particular, parabolic equations are widely used for modeling diffusion processes, processes of fluid dynamics as well as biological and ecological phenomena. These equations are also occur in the problems of heat and mass transfer, combustion theory, filter theory etc. Besides, in spite of sufficiently wide amount of known results in the field of approximate solution of parabolic equations, there is important need for developing effective numerical methods for solving nonlinear parabolic equations. Such methods must be quite simple and in the same time be resistant to initial data disturbances as well as be applicable to a wide range of equations.

*Materials and methods.* The main subject of this paper is Cauchy problem for one-dimensional parabolic equations that is nonlinear in unknown function. We consider the problem of constructing the numerical method for solving the mentioned equation. In order to do that we change from the Cauchy problem for parabolic differential equation to a nonlinear integral equation. The integral equation is then solved by means of continuous operator method for nonlinear equations: an auxiliary system of integro-differential equations of special type is constructed and then it solved with one of the numerical methods for solving differential equations. The result of the method is a set of approximate values of unknown function in the nodes of the uniform mesh, which is constructed in a finite domain.

*Results.* A numerical method for solving the Cauchy problem for nonlinear one-dimensional parabolic differential equation is proposed in the paper. A high potential of this method is primarily due to its simplicity and also its universality that allows to apply the same algorithm for very wide range of nonlinearities.

*Conclusions.* An effective iterative method for solving the Cauchy problem for nonlinear one-dimensional parabolic differential equation is proposed. Extending the method to boundary problems as well as to multidimensional equations is of considerable theoretical and practical interest.

**Keywords:** nonlinear parabolic equations, Cauchy problem, continuous operator method, nonlinear integral equations, logarithmic norm.

### **Введение**

Проблема построения эффективных методов приближенного решения нелинейных параболических уравнений имеет давнюю историю. К настоящему времени известно множество работ, посвященных вопросам исследования и решения уравнений в частных производных с различными видами нелинейностей [1–3] и др. Большое число работ посвящено приближенным методам решения параболических уравнений [4–9]. Существующие справочники охватывают различные виды уравнений в частных производных [10, 11]. При решении параболических уравнений используется большое число приближенных методов – разложение по различным базисным функциям, метод

сеток, метод конечных элементов, метод граничных элементов, вариационные и проекционные методы, итерационные методы. Тем не менее сохраняется потребность в дальнейшей разработке точных и устойчивых численных методов, позволяющих эффективно решать как начальные, так и начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений математической физики с различными типами нелинейностей.

В данной статье описывается один из таких методов. Его ключевыми преимуществами являются простота построения и реализации, а также универсальность (под которой разумеется применимость метода без его существенной модификации к широкому классу нелинейных уравнений в частных производных) и устойчивость к возмущениям исходных данных, доказательство которой базируется на свойствах логарифмической нормы оператора.

Основой предлагаемого численного метода служит непрерывный операторный метод решения нелинейных уравнений в банаховых пространствах [12]. Изложим основную идею этого метода.

Пусть имеется нелинейное операторное уравнение в банаховом пространстве  $B$ :

$$\Psi(x) - f = 0, \quad x \in B, \quad (1)$$

где оператор  $\Psi: B \rightarrow B$  является нелинейным.

Согласно непрерывному операторному методу с уравнением (1) связывается задача Коши

$$\frac{d\bar{x}}{d\sigma} = A(\bar{x}(\sigma)) - f, \quad (2)$$

$$\bar{x}(0) = \chi, \quad (3)$$

для дифференциального уравнения относительно вспомогательной функции  $\bar{x}(\sigma)$ . Здесь  $\chi$  – произвольный элемент банахова пространства  $B$ .

Обозначим через  $\Lambda(A)$  логарифмическую норму оператора  $A$ . Справедливы следующие теоремы, доказательства которых приведены в статье [12].

**Теорема 1.** Пусть уравнение (1) имеет решение  $x^*$  и на любой дифференцируемой кривой  $g(t)$ , расположенной в банаховом пространстве  $B$ , справедливо неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq -\alpha_g, \quad \alpha_g > 0. \quad (4)$$

Тогда решение задачи (2)–(3) сходится при  $t$ , стремящемся к бесконечности, к решению  $x^*$  уравнения (1) при любом начальном приближении.

**Теорема 2.** Пусть уравнение (1) имеет решение  $x^*$  и на любой дифференцируемой кривой  $g(t)$ , расположенной в шаре  $R(x^*, r)$ , выполняются следующие условия:

– при любом  $t$  ( $t > 0$ ) справедливо равенство  $\int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq 0$ ;

– имеет место неравенство (4).

Тогда решение задачи Коши (2)–(3) сходится при  $t$ , стремящемся к бесконечности, к решению уравнения (1).

В настоящей статье рассматривается проблема приближенного решения задачи Коши для нелинейного одномерного параболического дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Phi(t, x, u(t, x)), \quad (5)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad (6)$$

где  $x \in R$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Рассматривается как случай зависимости нелинейного члена  $\Phi$  непосредственно от функции  $u(t, x)$ , так и случай зависимости  $\Phi$  также и от производной  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Для успешного применения метода требуется знание (точных либо приближенных) значений функции  $\varphi(x)$  не более чем в конечном множестве точек на вещественной оси. Решенные модельные примеры подтвердили эффективность метода.

### 1. Описание метода

Рассмотрим задачу Коши для одномерного нелинейного уравнения теплопроводности (5)–(6).

Поставим задачу о восстановлении функции  $u(t, x)$  в конечной области  $\Omega = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, -A \leq x \leq A\}$ , где  $A$  – достаточно большое вещественное положительное число, являющееся параметром метода.

Известно [10], что задача (5)–(6) может быть сведена к следующему нелинейному интегральному уравнению:

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s, \xi, u(s, \xi)) G(x, \xi, t-s) d\xi ds, \quad (7)$$

где  $G(x, \xi, t)$  определяется формулой

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \exp \left[ -\frac{(x-\xi)^2}{4at} \right].$$

**Замечание 1.** Поскольку  $\lim_{t \rightarrow 0} G(x, \xi, t) = 0$ , то при всех  $x \in R$ ,  $\xi \in R$ ,  $0 \leq t \leq T$  необходимо положить  $G(x, \xi, 0) \equiv 0$ .

Введем на множестве  $\Omega$  сетку узлов  $(t_i, x_j)$ , где  $t_i = i\tau$ ,  $j = -A + jh$ ,  $i = \overline{0, M}$ ,  $j = \overline{0, N}$ ,  $\tau = T/M$ ,  $h = 2A/N$ ;  $M$ ,  $N$  – достаточно большие целые положительные числа.

Обозначим  $u_{i,j} = u(t_i, x_j)$ . Будем восстанавливать функцию  $u(t, x)$  в области  $\Omega$  в виде дискретного множества приближенных значений  $\{u_{i,j}\}_{i=\overline{1,M}, j=\overline{0,N}}$  в точках сетки  $(t_i, x_j)$ .

**Замечание 2.** Нетрудно видеть, что значения  $\{u_{0,j}\}_{j=\overline{0,N}}$  являются известными из начального условия (6):  $u_{0,j} = \varphi(x_j)$ ,  $j = \overline{0,N}$ .

Приравняем левые и правые части уравнения (7) в точках  $(t_i, x_j)$ :

$$u_{i,j} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x_j, \xi, t_i) d\xi + \int_0^{t_i} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s, \xi, u(s, \xi))(x_j, \xi, t_i - s) d\xi ds. \quad (8)$$

Для построения системы уравнений относительно множества неизвестных значений  $\{u_{i,j}\}_{i=\overline{1,M}, j=\overline{0,N}}$  необходимо аппроксимировать интегралы

в правой части (8), используя только значения  $\{u_{i,j}\}_{i=\overline{0,M}, j=\overline{0,N}}$ .

Первый интеграл аппроксимируем квадратурной формулой трапеций

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x_j, \xi, t_i) d\xi &\approx \int_{-B}^B \varphi(\xi) G(x_j, \xi, t_i) d\xi \approx \\ &\approx \frac{h}{2} \cdot \sum_{l=0}^{N'-1} \{u_{0,l} G(x_j, x_l, t_i) + u_{0,l+1} G(x_j, x_{l+1}, t_i)\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где целое положительное  $N'$  фиксируется выражением  $N' = \left\lceil \frac{2B}{h} \right\rceil$ .

Число  $B > 0$  может быть зафиксировано произвольным образом, но так, чтобы выполнялось неравенство  $B \geq A$ . На практике целесообразным является использование при  $x \in [-B, B] \setminus [-A, A]$  известных (например, измеренных) значений функции  $\varphi(x)$ . Однако в случае, если значения  $\varphi(x)$  известны только в интервале  $x \in [-A, A]$ , можно воспользоваться одним из способов продолжения функции  $\varphi(x)$ :

- 1) положить  $\varphi(x) \equiv 0$  при  $x \in [-B, B] \setminus [-A, A]$ ;
- 2) положить  $\varphi(x) \equiv \begin{cases} \varphi(A), & \text{если } x \in (A, B], \\ \varphi(-A), & \text{если } x \in [-B, -A); \end{cases}$
- 3) определить значения  $\varphi(x)$  в соответствии с формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(A) - \frac{\varphi(A)}{B-A}(x-A), & \text{если } A < x \leq B, \\ \varphi(-A) - \frac{\varphi(-A)}{A-B}(x+A), & \text{если } -B \leq x < -A. \end{cases}$$

Перечисленные способы являются эффективными, если функция  $\varphi(x)$  является финитной либо удовлетворяет условию  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0$ .

Обозначим

$$\Psi_{1,i,j} = \frac{h}{2} \cdot \sum_{l=0}^{N'-1} \{u_{0,l} G(x_j, x_l, t_i) + u_{0,l+1} G(x_j, x_{l+1}, t_i)\}.$$

Обратимся к аппроксимации двумерного интеграла в уравнении (8). Для этого воспользуемся следующим приемом: разобьем область приближенного интегрирования  $[0, t_i] \times [-A, A]$  точками  $(t_k, x_l)$  ( $k = \overline{0, i}$ ,  $l = \overline{0, N}$ ) на прямоугольники  $[t_k, t_{k+1}] \times [x_l, x_{l+1}]$ , в каждом из которых заменим функцию  $\Phi(t, x, u(t, x))$  постоянной, определяемой как среднее арифметическое значение этой функции, взятое по вершинам прямоугольника  $[t_k, t_{k+1}] \times [x_l, x_{l+1}]$ . В результате получаем следующую аппроксимацию:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_i} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s, \xi, u(s, \xi)) G(x_j, \xi, t_i - s) d\xi ds &\approx \int_0^{t_i} \int_{-A}^A \Phi(s, \xi, u(s, \xi)) G(x_j, \xi, t_i - s) d\xi ds = \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_l}^{x_{l+1}} \Phi(s, \xi, u(s, \xi)) G(x_j, \xi, t_i - s) d\xi ds \approx \\ &\approx \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{N-1} \{ [\Phi(t_k, x_l, u_{k,l}) + \Phi(t_k, x_{l+1}, u_{k,l+1}) + \\ &+ \Phi(t_{k+1}, x_l, u_{k+1,l}) + \Phi(t_{k+1}, x_{l+1}, u_{k+1,l+1}) ] \mu_{i,j,k,l} \}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $t_0 = 0$ , а  $\mu_{i,j,k,l}$  – аппроксимация интегралов

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_l}^{x_{l+1}} G(x_j, \xi, t_i - s) d\xi ds.$$

Аппроксимации  $\mu_{i,j,k,l}$  не зависят от значений  $\{u_{i,j}\}_{i=\overline{0,M}, j=\overline{0,N}}$  и,

следовательно, могут быть вычислены до основного итерационного процесса с произвольной степенью точности. Воспользуемся, например, двухмерным аналогом формулы трапеций:

$$\begin{aligned} \mu_{i,j,k,l} &= \frac{\tau h}{4} \cdot \{ G(x_j, x_l, t_i - t_k) + G(x_j, x_{l+1}, t_i - t_k) + \\ &+ G(x_j, x_l, t_i - t_{k+1}) + G(x_j, x_{l+1}, t_i - t_{k+1}) \}. \end{aligned} \quad (11)$$



Эту систему перепишем в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{1,i,0} + \Psi_{2,i,0} + \frac{1}{4} \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \{ \Phi(t_i, x_l, u_{i,l}) + \Phi(t_i, x_{l+1}, u_{i,l+1}) \} \cdot \mu_{i,0,i-1,l} - u_{i,0} = 0, \\ \Psi_{1,i,1} + \Psi_{2,i,1} + \frac{1}{4} \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \{ \Phi(t_i, x_l, u_{i,l}) + \Phi(t_i, x_{l+1}, u_{i,l+1}) \} \cdot \mu_{i,1,i-1,l} - u_{i,1} = 0, \\ \dots \\ \Psi_{1,i,N} + \Psi_{2,i,N} + \frac{1}{4} \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \{ \Phi(t_i, x_l, u_{i,l}) + \Phi(t_i, x_{l+1}, u_{i,l+1}) \} \cdot \mu_{i,N,i-1,l} - u_{i,N} = 0. \end{array} \right. \quad (15)$$

К решению системы (15) предлагается применить непрерывный операторный метод. Для этого введем в рассмотрение набор вспомогательных функций  $\bar{u}_{i,j}(\sigma)$ ,  $i = \overline{1, M}$ ,  $j = \overline{0, N}$ ,  $\sigma \geq 0$ , таких, что  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{u}_{i,j}(\sigma) = u_{i,j}$ .

В соответствии с непрерывным операторным методом [12], функции  $\bar{u}_{i,j}(\sigma)$  определяются из следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{u}_{i,0}}{d\sigma} = \gamma_0 \left( \Psi_{1,i,0} + \Psi_{2,i,0} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{N-1} \{ \Phi(t_i, x_l, u_{i,l}) + \Phi(t_i, x_{l+1}, u_{i,l+1}) \} \cdot \mu_{i,0,i-1,l} - u_{i,0} \right), \\ \frac{d\bar{u}_{i,1}}{d\sigma} = \gamma_1 \left( \Psi_{1,i,1} + \Psi_{2,i,1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{N-1} \{ \Phi(t_i, x_l, u_{i,l}) + \Phi(t_i, x_{l+1}, u_{i,l+1}) \} \cdot \mu_{i,1,i-1,l} - u_{i,1} \right), \\ \dots \\ \frac{d\bar{u}_{i,N}}{d\sigma} = \gamma_N \left( \Psi_{1,i,N} + \Psi_{2,i,N} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{N-1} \{ \Phi(t_i, x_l, u_{i,l}) + \Phi(t_i, x_{l+1}, u_{i,l+1}) \} \cdot \mu_{i,N,i-1,l} - u_{i,N} \right), \end{array} \right. \quad (16)$$

где коэффициенты  $\gamma_i$ ,  $\gamma_i = \pm 1$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , подбираются таким образом, чтобы были выполнены условия теорем 1 и 2.

Для обеспечения единственности решения системы (14) необходимо присоединить к ней начальные условия

$$\bar{u}_{i,0}(0) = \chi_0, \quad \bar{u}_{i,1}(0) = \chi_1, \quad \dots \quad \bar{u}_{i,N}(0) = \chi_N.$$

Известно (см. утверждение теоремы 1), что значения  $\chi_j$  ( $j = \overline{0, N}$ ) могут быть зафиксированы произвольным образом. Тем не менее на практике

для ускорения сходимости метода целесообразно определить начальные условия формулами

$$\bar{u}_{1,0}(0) = \varphi(x_0), \bar{u}_{1,1}(0) = \varphi(x_1), \dots, \bar{u}_{1,N}(0) = \varphi(x_N), \quad (17)$$

$$\bar{u}_{i,0}(0) = \bar{u}_{i-1,0}(\Xi), \bar{u}_{i,1}(0) = \bar{u}_{i-1,1}(\Xi), \dots, \bar{u}_{i-1,N}(\Xi), \quad (18)$$

где  $\Xi > 0$  – достаточно большое вещественное число.

Для решения задачи (16)–(18) применим весь спектр методов приближенного решения систем дифференциальных уравнений. Тем не менее проведенные численные эксперименты показывают, что, по-видимому, наиболее подходящим будет применение метода Эйлера как одного из наиболее простых методов решения дифференциальных уравнений, в то же время позволяющего эффективно решать поставленную задачу.

Пусть  $0 \leq \sigma \leq \Xi$ . Обозначим  $\sigma_m = m\theta$ ,  $m = \overline{0, L}$ ,  $\theta = \Xi/L$ . Пусть, кроме того,  $\bar{u}_{i,j,m} = \bar{u}_{i,j}(\sigma_m)$ . Тогда приближенное решение задачи (16)–(18) реализуется следующей вычислительной схемой:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,0,m+1} = & \bar{u}_{i,0,m} + \theta \cdot \gamma_0 \cdot \left\{ \Psi_{1,i,0} + \Psi_{2,i,0} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{N-1} \left\{ \Phi(t_i, x_l, \bar{u}_{i,l,m}) + \Phi(t_i, x_{l+1}, \bar{u}_{i,l+1,m}) \right\} \cdot \mu_{i,0,i-1,l} - \bar{u}_{i,0,m} \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,1,m+1} = & \bar{u}_{i,1,m} + \theta \cdot \gamma_1 \cdot \left\{ \Psi_{1,i,1} + \Psi_{2,i,1} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{N-1} \left\{ \Phi(t_i, x_l, \bar{u}_{i,l,m}) + \Phi(t_i, x_{l+1}, \bar{u}_{i,l+1,m}) \right\} \cdot \mu_{i,1,i-1,l} - \bar{u}_{i,1,m} \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

.....

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,N,m+1} = & \bar{u}_{i,N,m} + \theta \cdot \gamma_N \cdot \left\{ \Psi_{1,i,N} + \Psi_{2,i,N} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{N-1} \left\{ \Phi(t_i, x_l, \bar{u}_{i,l,m}) + \Phi(t_i, x_{l+1}, \bar{u}_{i,l+1,m}) \right\} \cdot \mu_{i,N,i-1,l} - \bar{u}_{i,N,m} \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $m = \overline{1, L-1}$ .

**Замечание 3.** Одна итерация метода Эйлера реализуется посредством последовательного вычисления значений  $\bar{u}_{i,0,m+1}, \dots, \bar{u}_{i,N,m+1}$  по выше-указанным формулам при фиксированном значении  $m$ .

Таким образом, предлагаемый алгоритм решения задачи Коши (5)–(6) может быть сформулирован в виде следующей последовательности действий.

1. Фиксируются параметры алгоритма, под которыми подразумеваются значения

$$A, B, L, M, N, \theta.$$

2. Вычисляются значения  $\Psi_{1,i,j}$  ( $i = \overline{1, M}$ ,  $j = \overline{0, N}$ ).

3. Вычисляются значения  $\mu_{i,j,k}$  при  $k = \overline{0, i-1}$ ,  $i = \overline{1, M}$ ,  $j = \overline{0, N}$ .
4. Значения  $u_{0,j}$  при  $j = \overline{0, N}$  фиксируются по формуле  $u_{0,j} = \varphi(x_j)$ .
5. Последовательно для  $i = \overline{1, M}$  выполняются следующие действия:
  - а) на основании известных либо найденных ранее значений  $u_{k,l}$ , где  $k = \overline{0, i-1}$  и  $l = \overline{0, N}$ , вычисляются значения  $\Psi_{2,i,j}$ ;
  - б) последовательно проводится  $L$  ( $k = \overline{0, L-1}$ ) итераций вычислительной схемы, определяемой набором формул (19)–(21);
  - в) элементы множества значений  $\{u_{i,j}\}_{j=\overline{0, N}}$  фиксируются в соответствии с формулой  $u_{i,j} = \bar{u}_{i,j,L}$ ;
  - г) выполняется переход к следующему значению  $i$  с возвратом на шаг а.

Результатом работы алгоритма является набор значений  $\{u_{i,j}\}_{i=\overline{0, M}, j=\overline{0, N}}$ .

В случае необходимости функция  $u(t, x)$  может быть доопределена во всех точках множества  $\Omega$  при помощи локальных сплайнов.

Отдельно отметим важный случай, в котором нелинейная часть  $\Phi(t, x, u(t, x))$  зависит от производной  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . В этом случае встает вопрос об аппроксимации значений  $\Phi(t_k, x_l, u_{k,l})$  в узлах вышеописанной сетки. В данной работе указанную аппроксимацию предлагается строить следующим образом:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{t=t_k, x=x_l} = \begin{cases} \frac{u_{k,l+1} - u_{k,l}}{h}, & \text{если } l = 0, \\ \frac{u_{k,l+1} - u_{k,l-1}}{2h}, & \text{если } 1 \leq l < N, \\ \frac{u_{k,l} - u_{k,l-1}}{h}, & \text{если } l = N. \end{cases}$$

## 2. Решение модельных примеров

Ниже представлены результаты решения двух модельных примеров, демонстрирующих эффективность предложенного метода.

**Пример 1.** Пусть требуется восстановить функцию  $u(t, x)$ , являющуюся решением следующей задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{u \ln(u)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad (22)$$

$$u(0, x) = \exp\left(\frac{3}{2} - \frac{x^2}{8}\right). \quad (23)$$

**Замечание 5.** Точное решение задачи (22)–(23) дается формулой

$$u(t, x) = \exp \left[ \frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} + e^{t/2} \right]. \quad (24)$$

В процессе численных экспериментов были зафиксированы следующие значения параметров:

$$A = 10, \quad B = 10, \quad L = 100, \quad M = 20, \quad N = 200, \quad \theta = 0,1.$$

Результаты решения поставленной задачи приведены в табл. 1, где  $\varepsilon_{\text{абс}}$  обозначает абсолютную величину погрешности восстановления значений  $u(t_i, x_j)$ , вычисляемую по формуле

$$\varepsilon_{\text{абс}} = \max_{i=1, M, j=0, N} |u(t_i, x_j) - \bar{u}_{i,j,L}|. \quad (25)$$

Величина  $\varepsilon_{\text{отн}}$  определяется как относительная погрешность восстановления значений  $u(t_i, x_j)$ , которая рассчитывается следующим образом: пусть максимум  $\varepsilon_{\text{абс}}$  разности  $|u(t_i, x_j) - \bar{u}_{i,j,L}|$  достигается при  $i = i^*, j = j^*$ ; тогда  $\varepsilon_{\text{отн}}$  вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \frac{\varepsilon_{\text{абс}}}{|u(t^*, x^*)|}. \quad (26)$$

Таблица 1

| $t_i$ | $\varepsilon_{\text{абс}}$ | $\varepsilon_{\text{отн}}$ | $t_i$ | $\varepsilon_{\text{абс}}$ | $\varepsilon_{\text{отн}}$ |
|-------|----------------------------|----------------------------|-------|----------------------------|----------------------------|
| 0,1   | 0,180780                   | 0,038321                   | 1,1   | 0,122782                   | 0,013160                   |
| 0,2   | 0,037585                   | 0,007549                   | 1,2   | 0,141775                   | 0,013903                   |
| 0,3   | 0,042956                   | 0,008153                   | 1,3   | 0,164321                   | 0,014677                   |
| 0,4   | 0,048660                   | 0,008701                   | 1,4   | 0,191215                   | 0,015481                   |
| 0,5   | 0,055181                   | 0,009268                   | 1,5   | 0,223456                   | 0,016317                   |
| 0,6   | 0,062673                   | 0,009856                   | 1,6   | 0,262308                   | 0,017184                   |
| 0,7   | 0,071320                   | 0,010466                   | 1,7   | 0,309377                   | 0,018082                   |
| 0,8   | 0,081348                   | 0,011010                   | 1,8   | 0,366711                   | 0,019010                   |
| 0,9   | 0,093031                   | 0,011759                   | 1,9   | 0,436945                   | 0,019967                   |
| 1,0   | 0,106704                   | 0,012445                   | 2,0   | 0,523484                   | 0,020952                   |

Точное и приближенное решения примера при  $t = T = 2$  иллюстрируются рис. 1. По оси абсцисс отложены значения независимого аргумента  $x$ . Сплошной линией изображено определенное формулой (24) точное решение задачи (22)–(23), пунктиром – найденная при помощи предлагаемого метода аппроксимация решения.

Нетрудно заметить, что абсолютная и относительная погрешности достаточно медленно возрастают с ростом значений  $t$ . Вместе с тем из рис. 1

видно, что, несмотря на относительно большую величину абсолютной погрешности при  $t = T$ , эта погрешность достигается в некоторой окрестности точки  $x = 0$ , в которой относительная величина погрешности невелика.

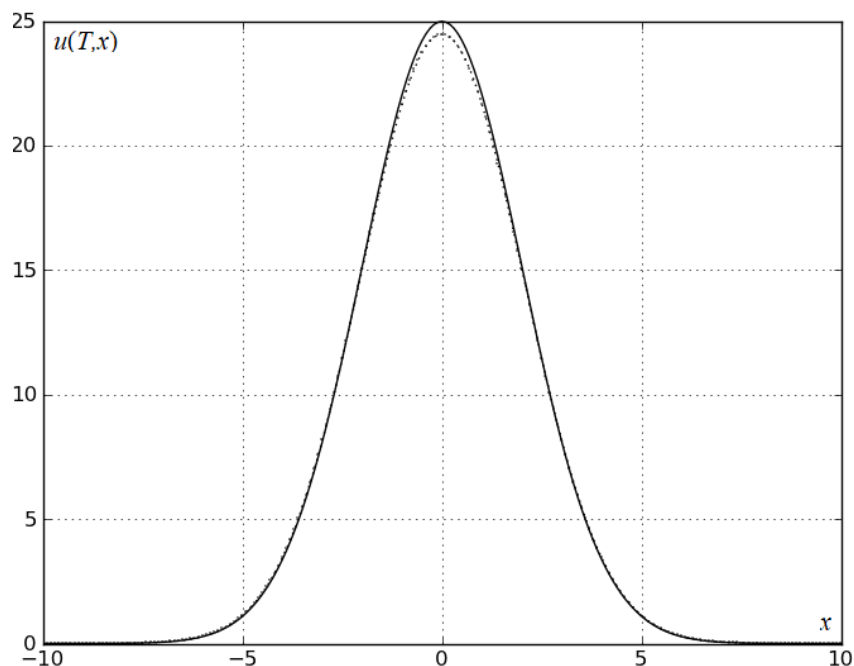


Рис. 1. Сравнительный график точного и приближенного решения модельного примера 1

**Пример 2.** Теперь рассмотрим задачу Коши для одномерного нелинейного параболического уравнения с нелинейным членом, включающим в себя производную неизвестной функции. В качестве примера обратимся к уравнению, известному [11] как уравнение Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x \in R, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad (27)$$

$$u(0, x) = \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1}. \quad (28)$$

**Замечание 6.** Точное решение задачи (26)–(27) определяется формулой

$$u(t, x) = \frac{4x + 2}{x^2 + x + 2t + 1}. \quad (29)$$

Для проведения численных расчетов фиксировались следующие значения параметров:

$$A = 50, \quad B = 50, \quad L = 200, \quad M = 20, \quad N = 1000, \quad \theta = 0,1.$$

Таблица 2 представляет результаты приближенного решения данного модельного примера. Как и в табл. 1,  $\varepsilon_{\text{абс}}$  обозначает абсолютную величину

погрешности восстановления значений  $u(t_i, x_j)$ , вычисляемую по формуле (24), а  $\varepsilon_{\text{отн}}$  обозначает относительную погрешность восстановления значений  $u(t_i, x_j)$ , вычисляемую по формуле (25).

Таблица 2

| $t_i$ | $\varepsilon_{\text{абс}}$ | $\varepsilon_{\text{отн}}$ | $t_i$ | $\varepsilon_{\text{абс}}$ | $\varepsilon_{\text{отн}}$ |
|-------|----------------------------|----------------------------|-------|----------------------------|----------------------------|
| 0,1   | 0,168673                   | 0,117017                   | 1,1   | 0,039996                   | 0,495547                   |
| 0,2   | 0,089304                   | 0,073118                   | 1,2   | 0,039979                   | 0,495372                   |
| 0,3   | 0,060923                   | 0,057496                   | 1,3   | 0,039962                   | 0,495201                   |
| 0,4   | 0,042934                   | 0,045892                   | 1,4   | 0,039945                   | 0,495035                   |
| 0,5   | 0,040110                   | 0,496712                   | 1,5   | 0,039929                   | 0,494873                   |
| 0,6   | 0,040090                   | 0,496506                   | 1,6   | 0,039913                   | 0,494714                   |
| 0,7   | 0,040070                   | 0,496303                   | 1,7   | 0,039897                   | 0,494559                   |
| 0,8   | 0,040051                   | 0,496106                   | 1,8   | 0,039881                   | 0,494408                   |
| 0,9   | 0,040032                   | 0,495914                   | 1,9   | 0,039866                   | 0,494259                   |
| 1,0   | 0,040014                   | 0,495728                   | 2,0   | 0,039851                   | 0,494113                   |

Результат восстановления функции  $u(t, x)$  при  $t = T = 2$  в модельном примере 2 также проиллюстрирован графически на рис. 2. По оси абсцисс отложены значения независимого аргумента  $x$ . Сплошной линией изображено точное решение задачи (27)–(28), зафиксированное формулой (29), пунктиром изображена восстановленная функция, найденная с помощью предложенного метода.

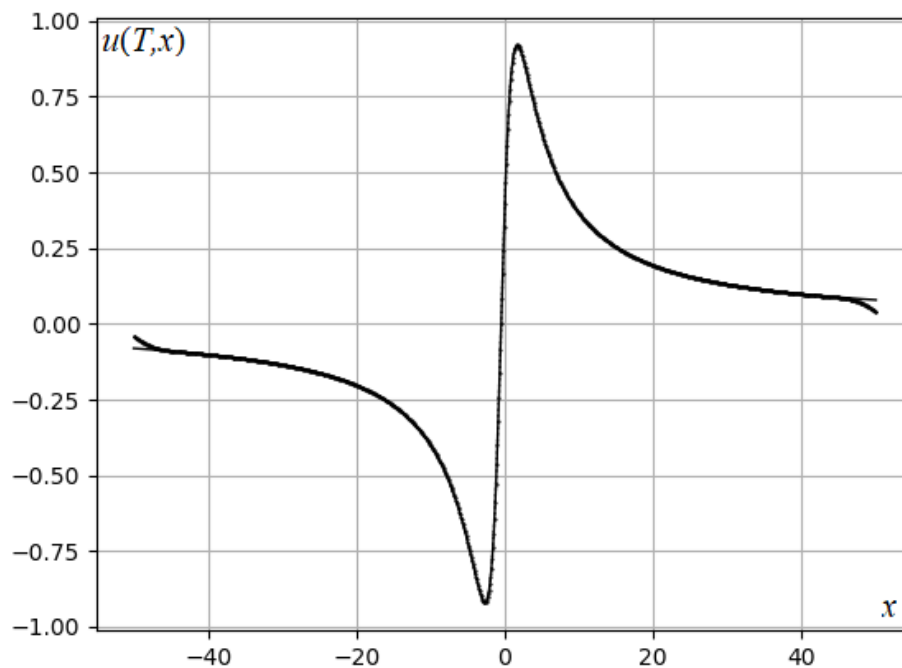


Рис. 2. Сравнительный график точного и приближенного решения модельного примера 2

Из рисунка 2 можно видеть, что искомая функция восстанавливается с высокой точностью везде в интервале  $x \in [-A, A]$ , а существенная погрешность наблюдается только вблизи концов этого интервала. При этом относительная погрешность оказывается достаточно большой в силу малости значений функции  $u(t, x)$  вблизи границ сегмента  $x \in [-A, A]$ .

### **Заключение**

Разработан численный метод решения прямых задач для одномерных уравнений параболического типа с нелинейным членом, зависящим как от самой неизвестной функции, так и от ее производной. Данный метод основан на подходе, идея которого состоит в применении к решению возникающих нелинейных уравнений непрерывного операторного метода, описанного ранее в статье [12]. Данный подход уже был ранее успешно применен авторами для решения коэффициентных обратных задач для параболических [13] и гиперболических [14] уравнений. Настоящая статья является первой работой, в которой этот подход используется для решения прямых задач для уравнений математической физики. Высокая эффективность метода подтверждается не только теоретическими рассуждениями, но и результатами решения модельных примеров. Представляет значительный интерес дальнейшая разработка вышеупомянутого подхода для его применения к уравнениям с иными типами нелинейностей, многомерным уравнениям, а также уравнениям эллиптического и гиперболического типов.

### **Библиографический список**

1. **Лионс, Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – Москва : Мир, 1972. – 588 с.
2. **Гаевский, Х.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. – Москва : Мир, 1978. – 336 с.
3. **Абловиц, М.** Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – Москва : Мир, 1987. – 479 с.
4. **Морс, Ф. М.** Методы теоретической физики / Ф. М. Морс, Г. Фешбах. – Москва : Медиа, 2012. – Т. 2.
5. **Калиткин, Н. Н.** Численные методы / Н. Н. Калиткин. – Москва : Наука, 1978. – 512 с.
6. **Самарский, А. А.** Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Москва : ЛИБРОКОМ, 2009. – 784 с.
7. **Вабищевич П. Н.** Вычислительные методы математической физики. Нестационарные задачи. – Москва : Вузовская книга, 2008. – 228 с.
8. **Калоджеро, Ф.** Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений // Ф. Калоджеро, А. Дегасперис. – Москва : Мир, 1985. – 472 с.
9. **Полянин, А. Д.** Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики // А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 256 с.
10. **Полянин, А. Д.** Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.
11. **Полянин, А. Д.** Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 432 с.

12. **Бойков, И. В.** Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 9. – С. 1308–1314.
13. **Бойков, И. В.** Об одном приближенном методе определения коэффициента теплопроводности / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Журнал Средневолжского математического общества. – 2019. – Т. 21, № 2. – С. 149–163.
14. **Бойков, И. В.** О численном решении коэффициентной обратной задачи для гиперболических уравнений / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2019. – № 3 (51). – С. 47–62.

### References

1. Lions Zh.-L. *Nekotorye metody resheniya nelineynykh kraevykh zadach* [Some methods for solving nonlinear boundary value problems]. Moscow: Mir, 1972, 588 p. [In Russian]
2. Gaevskiy Kh., Greger K., Zakharias K. *Nelineynye operatornye uravneniya i operatornye differentsial'nye uravneniya* [Nonlinear operator equations and operator differential equations]. Moscow: Mir, 1978, 336 p. [In Russian]
3. Ablowitz M., Sigur Kh. *Solitony i metod obratnoy zadachi* [Solitons and the inverse problem method]. Moscow: Mir, 1987, 479 p. [In Russian]
4. Mors F. M., Feshbakh G. *Metody teoreticheskoy fiziki* [Methods of theoretical physics]. Moscow: Media, 2012, vol. 2. [In Russian]
5. Kalitkin N. N. *Chislennyye metody* [Numerical method]. Moscow: Nauka, 1978, 512 p. [In Russian]
6. Samarskiy A. A., Vabishchevich P. N. *Vychislitel'naya teploperedacha* [Computational heat transfer]. Moscow: LIBROKOM, 2009, 784 p. [In Russian]
7. Vabishchevich P. N. *Vychislitel'nye metody matematicheskoy fiziki. Nestatsionarnyye zadachi* [Computational methods of mathematical physics. Non-stationary tasks]. Moscow: Vuzovskaya kniga, 2008, 228 p. [In Russian]
8. Kalodzhero F., Degasperis A. *Spektral'nye preobrazovaniya i solitony. Metody resheniya i issledovaniya nelineynykh evolyutsionnykh uravneniy* [Spectral transforms and solitons. Methods for solving and studying nonlinear evolution equations]. Moscow: Mir, 1985, 472 p. [In Russian]
9. Polyanin A. D., Zaytsev V. F., Zhurov A. I. *Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki* [Methods for solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow: FIZMATLIT, 2009, 256 p. [In Russian]
10. Polyanin A. D. *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Reference book of linear equations of mathematical physics]. Moscow: FIZMATLIT, 2001, 576 p. [In Russian]
11. Polyanin A. D., Zaytsev V. F. *Spravochnik po nelineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki: tochnyye resheniya* [Reference book of nonlinear equations of mathematical physics: exact solutions]. Moscow: FIZMATLIT, 2002, 432 p. [In Russian]
12. Boykov I. V. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2012, vol. 48, no. 9, pp. 1308–1314. [In Russian]
13. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva* [Middle Volga Mathematical Society Journal]. 2019, vol. 21, no. 2, pp. 149–163. [In Russian]
14. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2019, no. 3 (51), pp. 47–62. [In Russian]

***Бойков Илья Владимирович***

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
высшей и прикладной математики,  
Пензенский государственный  
университет (Россия, г. Пенза,  
ул. Красная, 40)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

***Boykov Il'ya Vladimirovich***

Doctor of physical and mathematical  
sciences, professor, head of  
the sub-department of higher and applied  
mathematics, Penza State University  
(40, Krasnaya street, Penza, Russia)

***Рязанцев Владимир Андреевич***

кандидат технических наук, доцент,  
кафедра высшей и прикладной  
математики, Пензенский  
государственный университет (Россия,  
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: math@pnzgu.ru

***Ryazantsev Vladimir Andreevich***

Candidate of engineering sciences,  
associate professor, sub-department  
of higher and applied mathematics,  
Penza State University (40, Krasnaya street,  
Penza, Russia)

---

**Образец цитирования:**

Бойков, И. В. О применении непрерывного операторного метода к решению прямой задачи для нелинейных параболических уравнений / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 1 (53). – С. 97–112. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-1-8.